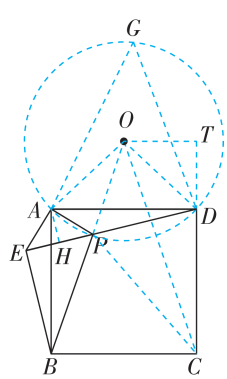
第二部分　题型突破

选填压轴

刷题型

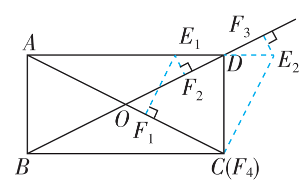
1. C 【解析】由题意可知，抛物线开口向下，即 $a<0$. ∵ 抛物线经过 $(-2,0)$，对称轴为直线 $x=-\frac{1}{2}$，∴ 抛物线经过点 $(1,0)$，∴ $x=1$ 时，$y=0$，即 $a+b+c=0$，故①错误. ∵ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=-\frac{1}{2}$，∴ 点 $(-6,y_1)$ 到对称轴的距离最大，点 $(-1,y_2)$ 到对称轴的距离最小，∴ $y_1<y_3<y_2$，故②正确. ∵ 方程 $ax^2+bx+c-1=0$ 的两个实数根为 x_1,x_2，∴ 抛物线与直线 $y=1$ 交点的横坐标为 x_1,x_2. ∵ 抛物线与 x 轴交点坐标为 $(-2,0)$，$(1,0)$，$x_1<x_2$，∴ $-2<x_1<x_2<1$，故③正确. ∵ $-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$，∴ $b=a$. ∵ $a+b+c=0$，∴ $c=-2a$. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，y 取得最大值，为 $\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c=-\frac{9}{4}a$. ∵ m 为任意实数，∴ $am^2+bm+c\leqslant-\frac{9}{4}a$，故④正确. 故选 C.

2. ①②④ 【解析】∵ $AE\perp AP$，∴ $\angle EAP=90°$. ∵ $\angle AED=45°$，∴ $\triangle AEP$ 是等腰直角三角形，∴ $AE=AP$，$\angle APE=\angle AEP=45°$，∴ $\angle APD=180°-\angle APE=135°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AB=AD$，$\angle BAD=90°$，∴ $\angle BAE=\angle DAP=90°-\angle BAP$，∴ $\triangle BAE\cong\triangle DAP$（SAS），故①正确. ∵ $\triangle BAE\cong\triangle DAP$，∴ $\angle BEA=\angle DPA=135°$，∴ $\angle BED=\angle BEA-\angle AED=90°$，即 $EB\perp ED$，故②正确. 如图，过点 A 作 $AH\perp DE$. 当 $\angle ADE=30°$ 时，$AH=\frac{1}{2}AD=1$，∴ $AE=\sqrt{2}AH=\sqrt{2}$，故③错误. 如图，作 $\triangle APD$ 的外接圆，设外接圆圆心为 O，在优弧 AD 上取一点 G，连接 OA，OD，AG，DG，∴ $\angle AGD=180°-\angle APD=45°$，∴ $\angle AOD=2\angle AGD=90°$. ∵ $OA=OD$，∴ $\angle OAD=\angle ODA=45°$，∴ $OD=AD\cdot\sin\angle OAD=\sqrt{2}$. 过点 O 作 $OT\perp CD$ 交 CD 的延长线于 T，连接 OP，CP，OC，∴ $\angle ODT=\angle ADT-\angle ODA=45°$，∴ $OT=OD\cdot\sin\angle ODT=1$，$DT=OD\cdot\cos\angle ODT=1$，∴ $CT=CD+DT=3$，∴ $OC=\sqrt{OT^2+CT^2}=\sqrt{10}$. ∵ $CP\geqslant OC-OP$，∴ 当点 P 是 OC 与⊙O 的交点时，CP



有最小值，最小值为 $OC-OP$ 的值，即 CP 的最小值为 $\sqrt{10}-\sqrt{2}$，故④正确. 故答案为①②④.

3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $2\sqrt{5}$ 【解析】如图，设 AC，BD 交于点 O，点 E_1 在线段 AD 上，E_2 在 AD 的延长线上，过点 E_1，E_2 分别作 $E_1F_1\perp AC$，$E_1F_2\perp BD$，$E_2F_3\perp BD$，$E_2F_4\perp AC$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=4$，$BC=8$，∴ $AD=BC=8$，$CD=AB=4$，∴ $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$，∴ $\sin\angle CAD=\frac{CD}{AC}=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\angle CAD=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\angle CAD=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.



∵ $AO=DO$，∴ $\angle OAD=\angle ODA$. 当 E 在线段 AD 上，即点 E 在 E_1 位置时，$AE_1=AD-DE_1=8-2=6$. 在 Rt$\triangle AE_1F_1$ 中，$E_1F_1=AE_1\cdot\sin\angle CAD=\frac{\sqrt{5}}{5}\times6=\frac{6\sqrt{5}}{5}$. ∵ $\angle OAD=\angle ODA$，∴ 在 Rt$\triangle E_1F_2D$ 中，$E_1F_2=DE_1\cdot\sin\angle E_1DF_2=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 当 E 在射线 AD 上，即点 E 在 E_2 位置时，连接 E_2C. 在 Rt$\triangle DCE_2$ 中，$\tan\angle DCE_2=\frac{1}{2}$，∴ $\angle CAD=\angle DCE_2$，∴ $\angle DCE_2+\angle DCA=90°$，∴ F_4 与 C 重合，∴ $E_2C=\sqrt{DE_2^2+DC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 在 Rt$\triangle DE_2F_3$ 中，$E_2F_3=DE_2\cdot\sin\angle E_2DF_3=DE_2\cdot\sin\angle E_1DF_2=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 综上，点 E 到矩形对角线所在直线的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 或 $2\sqrt{5}$.

4. -1 或 3 【解析】由友好同轴二次函数的定义知，C_2：$y=(1-a)x^2+4(1-a)x+4$，其图象的对称轴为直线 $x=-2$.

①当 $a<1$ 且 $a\neq0$，$a\neq\frac{1}{2}$ 时，二次函数 C_2 的图象开口向上，当 $-3\leqslant x\leqslant-2$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $-2<x\leqslant0$ 时，y 随 x 的增大而增大，则当 $x=-2$ 时，y 取得最小值，最小值为 $4a$，当 $x=0$ 时，y 取得最大值，最大值为 4，所以 $4-4a=8$，解得 $a=-1$.

②当 $a>1$ 时，二次函数 C_2 的图象开口向下，当 $-3\leqslant x\leqslant -2$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $-2<x\leqslant 0$ 时，y 随 x 的增大而减小，则当 $x=-2$ 时，y 取得最大值，最大值为 $4a$，当 $x=0$ 时，y 取得最小值，最小值为 4，所以 $4a-4=8$，解得 $a=3$. 综上，a 的值为 -1 或 3.

5. C 【解析】由题知，点 A_1,B_1,C_1 分别是 AC,BC,AB 的中点，所以 $A_1B_1/\!/AB$，$B_1C_1/\!/AC$，$A_1C_1/\!/BC$，$A_1B_1=\frac{1}{2}AB$，$B_1C_1=\frac{1}{2}AC$，$A_1C_1=\frac{1}{2}BC$，所以易得 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle BAC$，则 $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$. 又因为 $\triangle ABC$ 的面积为 1，所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 $\frac{1}{4}$. 同理可得，$\triangle A_2B_2C_2$ 的面积为 $\left(\frac{1}{4}\right)^2$，$\triangle A_3B_3C_3$ 的面积为 $\left(\frac{1}{4}\right)^3$，…，所以 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 $\left(\frac{1}{4}\right)^n$. 故选 C.

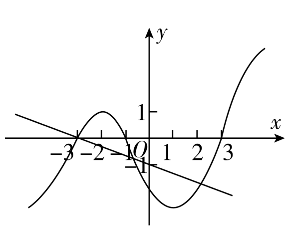
关键点拨

相似三角形的性质

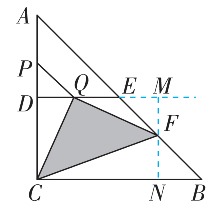
相似三角形的面积比等于相似比的平方.

6. 45 【解析】∵ $a_1=1,a_2=3,a_3=6,a_4=10,a_5=15,\cdots$，∴ $a_{n-1}=1+2+3+\cdots+n-1=\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$，$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$. ∵ $a_{n-1}+a_n=2\,025$，∴ $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=2\,025$，即 $n^2=2\,025$，解得 $n=45$（负值已舍去），故答案为 45.

7. C 【解析】①由图象可知，当 $x<3$ 时，函数图象有最高点，即 y 有最大值，故①正确；②由图象可知，当 $y<0$ 时，$-1<x<3$ 或 $x<-3$，故②不正确；③将函数的图象向右平移 3 个单位长度时，原图象上坐标为 $(-3,0)$ 的点过原点，将函数的图象向左平移 3 个单位长度时，原图象上坐标为 $(3,0)$ 的点过原点，故③正确；④令 $x=m$，$y=-\frac{1}{3}m-1$，∴ 点 $P\left(m,-\frac{1}{3}m-1\right)$ 在直线 $y=-\frac{1}{3}x-1$ 上. 如图，直线 $y=-\frac{1}{3}x-1$ 与函数图象有三个交点，∴ 符合要求的点 P 共有 3 个，故④正确. 综上，①③④正确. 故选 C.

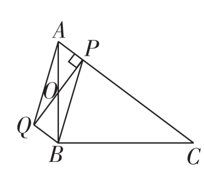


8. C 【解析】过点 F 作 $FN\perp BC$ 于点 N，延长 NF 交 DE 的延长线于点 M，如图. ∵ 点 D,E 分别为 AC,BA 的中点，∴ $DE=\frac{1}{2}BC=4$，$DE/\!/BC$. ∵ $FN\perp BC$，∴ $MN\perp DE$. ∵ $\angle ACB=90^\circ$，∴ 四边形 $CDMN$ 为矩形，∴ $MN=CD=\frac{1}{2}AC=4$. ∵ $AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$，∴ $\angle B=45^\circ$. ∵ $FN\perp BC$，∴ $\angle NFB=45^\circ$，∴ $\angle EFM=\angle NFB=45^\circ$，∴ $\triangle MEF$ 为等腰直角三角形，∴ $ME=MF$. 设 $ME=MF=m$. 由题意得 $PA=x$，则 $DP=4-x$. ∵ $DQ=DP$，∴ $DQ=4-x$，∴ $QE=DE-DQ=4-(4-x)=x$. ∵ $QF\perp CQ$，∴ $\angle DQC+\angle MQF=90^\circ$. ∵ $\angle DQC+\angle DCQ=90^\circ$，∴ $\angle DCQ=\angle MQF$. ∵ $\angle CDQ=\angle QMF=90^\circ$，∴ $\triangle DCQ\backsim\triangle MQF$，∴ $\frac{CD}{DQ}=\frac{MQ}{MF}$，∴ $\frac{4}{4-x}=\frac{m+x}{m}$，解得 $m=4-x$，∴ $MF=4-x$，∴ $FN=MN-MF=x$. ∵ $S_{\triangle CQF}=S_{梯形CDEB}-S_{\triangle CDQ}-S_{\triangle QEF}-S_{\triangle BCF}$，∴ $y=\frac{1}{2}(DE+BC)\cdot CD-\frac{1}{2}\times CD\cdot DQ-\frac{1}{2}\times QE\cdot MF-\frac{1}{2}\times BC\cdot NF=\frac{1}{2}\times(4+8)\times4-\frac{1}{2}\times4(4-x)-\frac{1}{2}\times x(4-x)-\frac{1}{2}\times8x=24-8+2x-2x+\frac{1}{2}x^2-4x=\frac{1}{2}x^2-4x+16=\frac{1}{2}(x-4)^2+8$. ∵ $\frac{1}{2}>0$，∴ 抛物线的开口向上，顶点为 $(4,8)$. 由题意得，x 的取值范围为 $0<x<4$，∴ 当 $x=0$ 时，$y=16$，当 $x=4$ 时，$y=8$，∴ y 关于 x 的函数图象是以 $(4,8)$ 和 $(0,16)$ 为端点的抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-4)^2+8$ 的一部分，故选 C.

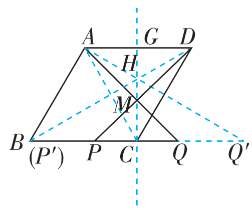


9. C 【解析】∵ $y=x^2-4x=(x-2)^2-4$，∴ 抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为 $(2,-4)$. 当 $x=-2$ 时，$y=12$，∴ $(-2,12)$ 关于对称轴对称的点的坐标为 $(6,12)$，∴ $2\leqslant m\leqslant 6$. 故选 C.

10. $\frac{24}{5}$ 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=6$，$BC=8$，∴ $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10$. 设 AB 交 QP 于点 O. ∵ 四边形 $PAQB$ 是平行四边形，∴ $OA=\frac{1}{2}AB=3$，$OP=\frac{1}{2}PQ$，∴ 当 OP 取最小值时，PQ 取最小值. 如图，当 $OP\perp AC$ 时，OP 取最小值，此时 $\sin\angle BAC=\frac{OP}{AO}=\frac{BC}{AC}$，即 $\frac{OP}{3}=\frac{8}{10}$，解得 $OP=\frac{12}{5}$，∴ 线段 PQ 的最小值为 $2OP=\frac{24}{5}$. 故答案为 $\frac{24}{5}$.



11. B　【解析】如图，过点 C 作 BC 的垂线，交 AD 于点 G，作点 B 关于点 C 的对称点 Q'，易知 GC 垂直平分 BQ'，连接 BD 和 AQ' 交于点 H，连接 AC. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，∴ $\triangle ACD$ 是等边三角形，∴ $DC=AC$，易得 CG 垂直平分 AD. ∵ P,Q 关于点 C 对称，∴ $PC=QC$. ∵ 菱形 $ABCD$，$\angle ABC=60°$，∴ $\angle DCP=120°$，$\angle ACQ=120°$，∴ $\triangle DCP\cong\triangle ACQ$，∴ $\angle DPQ=\angle AQP$，∴ $MP=MQ$，∴ M 一定在直线 CG 上. ∵ P 从点 B 运动到点 C，∴ 点 M 的运动路径长即为 CH 的长. ∵ $AB=CB=1$，$\angle DBC=30°$，∴ $CH=BC\cdot\tan\angle DBC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即点 M 的运动路径长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



12. $\frac{4\pi}{3}$　【解析】∵ $\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，$AB=8$ cm，∴ $\angle A=60°$，$AC=\frac{1}{2}AB=4$ cm. ∵ 三角板 $A'B'C$ 绕直角顶点 C 顺时针旋转，点 A' 落在 AB 边上，∴ $CA'=CA$，∴ $\triangle CAA'$ 为等边三角形，∴ $\angle ACA'=60°$，∴ 点 A' 所转过的路径长为 $\frac{60\pi\times4}{180}=\frac{4\pi}{3}$(cm). 故答案为 $\frac{4\pi}{3}$.

解答压轴

刷题型

1. (1)【证明】∵ $AB=AC$，∴ $\angle ABC=\angle ACB$.

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$，∴ $\angle ADB=\angle ACB$，∴ $\angle ABC=\angle ADB$.

∵ $\angle ADB=\angle DBE+\angle E$，∴ $\angle ABC=\angle DBE+\angle E$.

(2)【证明】∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AD}$，∴ $\angle ABD=\angle ACD$.

∵ $BG=DG$，∴ $\angle BDG=\angle ABD=\angle ACD$.

又∵ $\angle DHF=\angle CHD$，∴ $\triangle HDF\backsim\triangle HCD$，

∴ $\frac{HF}{HD}=\frac{HD}{HC}$，∴ $HD^2=HF\cdot HC$.

由(1)知，$\angle ABC=\angle DBE+\angle E$.

又∵ $\angle ABC=\angle DBE+\angle ABD$，∴ $\angle ABD=\angle E$.

∵ $\angle ADB=\angle ADG+\angle BDG=\angle DBC+\angle E$，

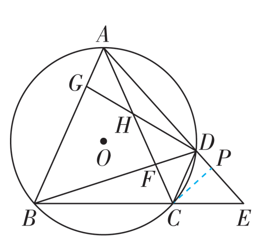
∴ $\angle ADG=\angle DBC$.

∵ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CD}$，∴ $\angle DAC=\angle DBC$，

∴ $\angle DAC=\angle ADG$，∴ $AH=DH$，

∴ $AH^2=HF\cdot HC$.

(3)【解】过点 C 作 $CP\perp AE$ 于点 P，如图所示.



∵ $BG=DG$，$AH=DH$，∴ $\triangle AGH$ 的周长为 $AG+GH+AH=AG+GH+DH=AG+DG=AG+BG=AB$.

∵ $AD=2DE$，

∴ 设 $DE=m$，则 $AD=2m$，∴ $AE=AD+DE=3m$.

∵ $\angle ACD=\angle ABD=\angle E$，$\angle CAD=\angle EAC$，

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle AEC$，∴ $\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AC}=\frac{CD}{EC}$，

∴ $AC^2=AD\cdot AE=2m\cdot3m=6m^2$，∴ $AC=\sqrt{6}m$.

又∵ $CD=\sqrt{6}$，∴ $\frac{2m}{\sqrt{6}m}=\frac{\sqrt{6}}{EC}$，∴ $EC=3$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

∴ $\angle ABC+\angle ADC=180°$.

∵ $\angle ADC+\angle CDP=180°$，∴ $\angle CDP=\angle ABC$，

∴ $\tan\angle CDP=\tan\angle ABC=\sqrt{5}$.

在 Rt$\triangle DCP$ 中，$\tan\angle CDP=\frac{PC}{PD}$，

∴ $\frac{PC}{PD}=\sqrt{5}$，即 $PC=\sqrt{5}PD$，

∴ $CD=\sqrt{PD^2+PC^2}=\sqrt{6}PD$，

∴ $\sqrt{6}PD=\sqrt{6}$，∴ $PD=1$，∴ $PC=\sqrt{5}$，$PE=DE-PD=m-1$.

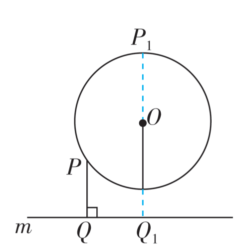
在 Rt$\triangle CPE$ 中，$PE^2+PC^2=CE^2$，

∴ $(m-1)^2+(\sqrt{5})^2=3^2$，

解得 $m=3$ 或 $m=-1$(舍去)，

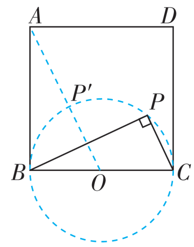
∴ $AB=AC=3\sqrt{6}$，∴ $\triangle AGH$ 的周长为 $3\sqrt{6}$.

2. (1)【解】如图(1)，过点 O 作 $P_1Q_1\perp m$，P_1 在 O 点上方. 由题意可知此时 P_1Q_1 的长最大，最大值为 $7+5=12$，故答案为 12.



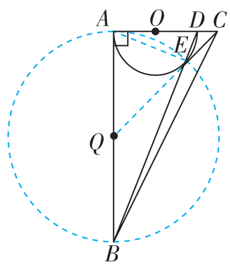
图(1)

(2)在正方形 $ABCD$ 中,$AB=BC=4$. ∵ $\angle BPC=90°$,∴ 点 P 在以 BC 为直径的圆 O 位于 BC 上方的部分运动. 如图(2),连接 AO,交圆 O 位于 BC 上方的部分于点 P',此时 AP' 的长即为 AP 长的最小值. ∵ $BC=4$, $\angle ABC=90°$, ∴ $BO=OP'=\frac{1}{2}BC=2$,∴ $AO=\sqrt{AB^2+BO^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,∴ $AP'=AO-OP'=2\sqrt{5}-2$,∴ AP 长的最小值为 $2\sqrt{5}-2$.



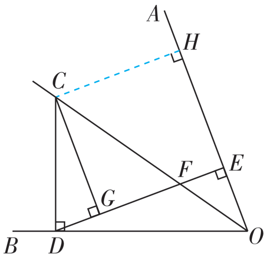
图(2)

(3)如图(3),连接 AE,以 AB 为直径作圆 Q. 根据题意得 $\angle AED=90°$,∴ $\angle BEA=90°$,∴ 点 E 也在圆 Q 上. 连接 QE,当 Q,E,C 三点共线时,CE 取得最小值. ∵ $\angle BAC=90°$,$AB=6$ km,$AC=3$ km,∴ $AQ=QE=\frac{1}{2}AB=3$ km. 在 Rt$\triangle ACQ$ 中,由勾股定理得 $CQ=\sqrt{AQ^2+AC^2}=3\sqrt{2}$ km,∴ $CE=CQ-QE=(3\sqrt{2}-3)$ km,∴ CE 的最小值为 $(3\sqrt{2}-3)$ km.



图(3)

3.【解】(1)如图(1),过点 C 作 $CH\perp OA$ 于 H.



图(1)

∵ OC 平分 $\angle AOB$,$CD\perp OB$ 于 D,$CH\perp OA$ 于 H,

∴ $CD=CH$.

∵ $DE\perp OA$ 于 E,$CG\perp DE$ 于 G,$CH\perp OA$ 于 H,

∴ $\angle CGE=\angle CHE=\angle GEH=90°$,

∴ 四边形 $CGEH$ 为矩形,∴ $HE=CG$.

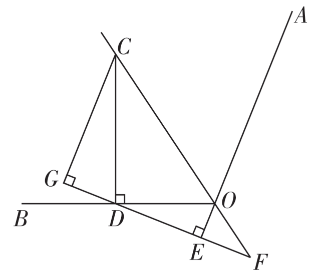
在 Rt$\triangle CDO$ 和 Rt$\triangle CHO$ 中,$CO=CO$,$CD=CH$,

∴ Rt$\triangle CDO\cong$Rt$\triangle CHO$(HL),

∴ $OD=OH=EH+OE=CG+OE$.

故答案为 $CG+OE=OD$.

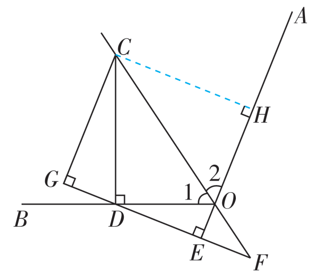
(2)补全后的图形如图(2)所示.



图(2)

不成立,正确结论为 $OD+OE=CG$.

证明:如图(3),过点 C 作 $CH\perp OA$ 于点 H.



图(3)

∵ $CD\perp OB$,∴ $\angle CDO=\angle CHO=90°$.

∵ OC 平分 $\angle AOB$,∴ $\angle 1=\angle 2$.

∵ $CO=CO$,∴ $\triangle COD\cong\triangle COH$(AAS),∴ $OD=OH$,∴ $OD+OE=OH+OE=HE$. ∵ $CH\perp OA$,$CG\perp DE$,$DE\perp OA$,∴ $\angle DEO=\angle CGD=\angle CHO=90°$,∴ 四边形 $CGEH$ 是矩形,∴ $HE=CG$,

∴ $OD+OE=CG$.

(3)$\frac{\sqrt{15}}{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

①若$\angle AOB$ 为锐角,如图(1),不妨设 $GF=3$,$EF=1$,则 $CH=CD=GE=FG+FE=4$.

∵ $CG\perp DE$,$DE\perp OA$,∴ $CG/\!/OA$,∴ $\triangle CGF\backsim\triangle OEF$,∴ $\frac{CG}{OE}=\frac{GF}{EF}$,则 $CG=3OE$. 设 $OE=x$,则 $CG=3x$. 由(1)知,$OD=OE+CG=4x$,则 $DO=4OE$. 易证$\triangle CDG\backsim\triangle DOE$,则$\frac{CD}{DG}=\frac{DO}{OE}=4$,

∴ $DG=1$. 在 Rt$\triangle CDG$ 中,∵ $CD=4$,$DG=1$,则 $CG=3x=\sqrt{15}$,

∴ $x=\frac{\sqrt{15}}{3}$,∴ $\frac{DO}{CD}=\frac{4x}{4}=x=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

②若$\angle AOB$ 为钝角,如图(3),不妨设 $FG=3$,$EF=1$,则 $CH=CD=GE=FG-FE=3-1=2$. 易证$\triangle CGF\backsim\triangle OEF$,∴ $\frac{CG}{OE}=\frac{GF}{EF}$,

则 $CG=3OE$. 设 $OE=y$，则 $CG=3y$. 由（2）知，$CG=EH=OE+OD$，即 $3y=y+OD$，$\therefore OD=2y$. 易证 $\triangle CDG\backsim\triangle DOE$，则 $\dfrac{CD}{DG}=\dfrac{DO}{OE}=2$，$\therefore DG=1$，则 $CG=\sqrt{CD^2-GD^2}=\sqrt{3}$，则 $3y=\sqrt{3}$，$\therefore y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \dfrac{OD}{CD}=\dfrac{2y}{2}=y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

综上，$\dfrac{OD}{CD}$的值为$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

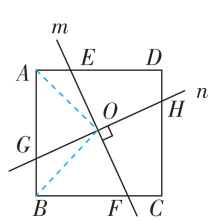
4.【解】（1）$\because$ 正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，$\therefore OA=OB$，$\angle OAB=\angle OBC=45°$，$\angle AOB=90°$. $\because$ 四边形 $A_1B_1C_1O$ 是正方形，$\therefore \angle EOF=90°$，$\therefore \angle AOE=\angle BOF$. 在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，$\begin{cases}\angle AOE=\angle BOF,\\ OA=OB,\\ \angle OAE=\angle OBF,\end{cases}$ $\therefore \triangle AOE\cong\triangle BOF$（ASA），$\therefore AE=BF$.

故答案为 $AE=BF$.

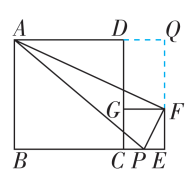
（2）如图（1），连接 OA，OB.

$\because$ 点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心，$\therefore S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\dfrac{1}{4}\times 8^2=16$，$\angle OAE=\angle OBG=45°$，$OA=OB$，$\angle AOB=90°$.

$\because m\perp n$，$\therefore \angle EOG=90°$，$\therefore \angle AOE=\angle BOG$，$\therefore \triangle AOE\cong\triangle BOG$（ASA），$\therefore S_{\triangle AOE}=S_{\triangle BOG}$，$\therefore S_{四边形OEAG}=S_{\triangle AOE}+S_{\triangle AOG}=S_{\triangle BOG}+S_{\triangle AOG}=S_{\triangle AOB}=16$.



图（1）



图（2）

（3）存在.

①当 $\angle AFP=90°$时，如图（2），延长 EF，AD 相交于点 Q.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 是正方形，$\therefore \angle BAD=\angle B=\angle E=90°$，$\therefore$ 四边形 $ABEQ$ 是矩形，$\therefore AQ=BE=BC+CE=8$，$EQ=AB=6$，$\angle Q=\angle E=90°$，$\therefore \angle EFP+\angle EPF=90°$.

$\because \angle AFP=90°$，$\therefore \angle EFP+\angle AFQ=90°$，$\therefore \angle EPF=\angle QFA$，

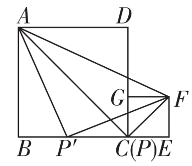
$\therefore \triangle EFP\backsim\triangle QAF$，$\therefore \dfrac{EP}{QF}=\dfrac{EF}{AQ}$.

$\because QF=EQ-EF=4$，$\therefore \dfrac{EP}{4}=\dfrac{2}{8}$，$\therefore EP=1$，$\therefore BP=BE-EP=7$.

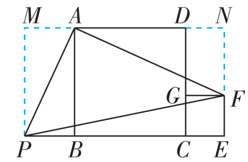
②当 $\angle APF=90°$时，如图（3）.

同①的方法得，$\triangle ABP\backsim\triangle PEF$，$\therefore \dfrac{AB}{PE}=\dfrac{BP}{EF}$.

$\because PE=BE-BP=8-BP$，$\therefore \dfrac{6}{8-BP}=\dfrac{BP}{2}$，$\therefore BP=2$ 或 6.



图（3）



图（4）

③当 $\angle PAF=90°$时，如图（4），过点 P 作 AB 的平行线交 DA 的延长线于 M，延长 EF，AD 相交于点 N.

同①的方法得，四边形 $ABPM$ 和四边形 $ABEN$ 是矩形，

$\therefore PM=AB=6$，$AM=BP$，$\angle M=90°$，$AN=BE=8$，$EN=AB=6$，

$\therefore FN=EN-EF=4$.

同①的方法得，$\triangle AMP\backsim\triangle FNA$，$\therefore \dfrac{PM}{AN}=\dfrac{AM}{FN}$，$\therefore \dfrac{6}{8}=\dfrac{AM}{4}$，

$\therefore AM=3$，$\therefore BP=3$.

综上所述，在直线 BE 上存在点 P，使$\triangle APF$ 为直角三角形，BP 的长度为 2 或 3 或 6 或 7.

5.【解】（1）①对于 $y=x+2$，代入点（m，m），得 $m=m+2$，方程无解，$\therefore y=x+2$ 不是"不动点函数"，故①错误；

②对于 $y=-3x+2$，代入点（m，m），

得 $m=-3m+2$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$时，$y=\dfrac{1}{2}$，$\therefore y=-3x+2$ 是"不动点函数"，且不动点是$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，故②错误；

③$y=x$ 是"不动点函数"，且有无数个不动点，故③正确.

故答案为③.

（2）$\because$ 一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）是"不动点函数"，

$\therefore$ 代入点（m，m），得 $m=mk+b$，

整理得（$1-k$）$m=b$.

当 $1-k\neq0$ 且 $k\neq0$，即 $k\neq1$ 且 $k\neq0$ 时，b 为任意实数；

当 $1-k=0$，即 $k=1$ 时，$b=0$.

（3）由 $y=x^2-2bx+c$ 可得，抛物线的顶点坐标为（b，$c-b^2$）.

$\because$ 抛物线 $y=x^2-2bx+c$ 的顶点为该函数图象上的一个不动点，$\therefore b=c-b^2$，即 $c=b^2+b$.

（4）根据题意得，$y=(x-6)(12-x)=-x^2+18x-72$，

即 $y=-x^2+18x-72$. 该函数是"不动点函数". 理由：

令$-x^2+18x-72=x$，即 $x^2-17x+72=0$，

解得 $x_1=8$，$x_2=9$，

$\therefore$ 该函数是"不动点函数". 该函数不动点表达的实际意义为在这段时间内，当以每件 8 元或 9 元出售这种商品时，销售总利润与销售单价相等.

6.【解】（1）由抛物线的解析式知，$OC=4$.

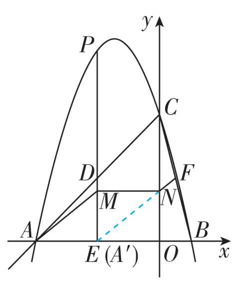
$\because \tan\angle CBA=\dfrac{OC}{OB}=4$，$\therefore OB=1$，即点 $B(1,0)$.

由题意得$\begin{cases}a-b+4=6,\\a+b+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-3,\end{cases}$

则抛物线的解析式为 $y=-x^2-3x+4$.

(2)当 $y=0$ 时，$-x^2-3x+4=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-4$，$\therefore A(-4,0)$. $\because B(1,0)$，$C(0,4)$，F 是 BC 的中点，$\therefore F\left(\dfrac{1}{2},2\right)$. 由点 A，C 的坐标易得直线 AC 的解析式为 $y=x+4$. 设点 $P(x,-x^2-3x+4)$，则点 $D(x,x+4)$，则 $PD=-x^2-3x+4-x-4=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$，$\therefore$ 当 $x=-2$ 时，PD 取得最大值，此时点 $E(-2,0)$，$D(-2,2)$，$\therefore MN=2$.

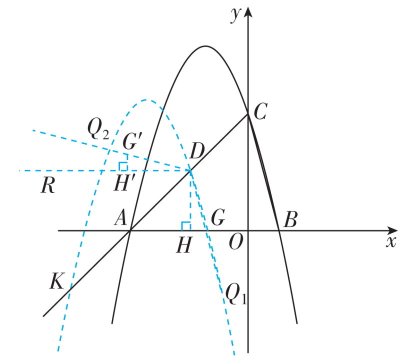
将点 A 向右平移 2 个单位得到点 $A'(-2,0)$，连接 $A'F$ 交 y 轴于点 N，过点 N 作 $NM\perp PE$ 于 M，连接 AM，如图(1)，则四边形 $MNA'A$ 为平行四边形，则 $AM=A'N$，则此时 $AM+MN+NF=A'N+MN+NF=2+A'F=2+\sqrt{\left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+2^2}=2+\dfrac{\sqrt{41}}{2}$，即 $AM+MN+NF$ 的最小值为 $2+\dfrac{\sqrt{41}}{2}$.



图(1)

(3)符合条件的点 Q 的坐标为 $(-1,-2)$ 或 $\left(-\dfrac{19}{4},\dfrac{43}{16}\right)$.

由(2)得线段 PD 长度取得最大值时 D 的坐标为 $(-2,2)$，$\therefore$ 新抛物线由 $y=-x^2-3x+4$ 向左平移 2 个单位，向下平移 2 个单位得到，$\therefore y'=-(x+2)^2-3(x+2)+4-2=-x^2-7x-8$. 如图(2)，过点 D 作 $DQ_1/\!/BC$ 交抛物线 y' 于点 Q_1，$\therefore \angle Q_1DK=\angle BCA$. 由点 B，C 的坐标易得直线 BC 的解析式为 $y=-4x+4$. $\because DQ_1/\!/BC$，$\therefore$ 直线 DQ_1 的解析式为 $y=-4x-6$，联立得 $-4x-6=-x^2-7x-8$，解得 $x_1=-1$，$x_2=-2$. 当 $x=-1$ 时，$y=-2$，$\therefore Q_1(-1,-2)$. 作 DQ_1 关于直线 AC 的对称线 DQ_2 交抛物线 y' 于点 Q_2，$\therefore \angle Q_2DK=\angle Q_1DK=\angle BCA$. 设 DQ_1 交 x 轴于点 G，点 G' 是点 G 关于直线 AC 的对称点，则 $DG=DG'$. 过点 D 作 $DR/\!/x$ 轴，作 $DH\perp x$ 轴于点 H，作 $G'H'\perp DR$ 于点 H'.



图(2)

当 $y=0$ 时，$0=-4x-6$，解得 $x=-\dfrac{3}{2}$，$\therefore G\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$.

$\because A(-4,0)$，$C(0,4)$，$\therefore OA=OC$，$\therefore \angle OAC=\angle OCA=45°$.

$\because DR/\!/x$ 轴，$\therefore \angle RDA=\angle DAH=\angle ADH=45°$，

$\therefore \angle G'DH'=\angle GDH$.

$\because \angle G'H'D=\angle GHD=90°$，$DG'=DG$，$\therefore \triangle G'DH'\cong\triangle GDH$，

$\therefore G'H'=GH=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$，$DH'=DH=2$，$\therefore G'\left(-4,\dfrac{5}{2}\right)$.

由点 D，G' 的坐标易得直线 DQ_2 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$，联立得 $-x^2-7x-8=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$，解得 $x=-2$ 或 $x=-\dfrac{19}{4}$.

当 $x=-\dfrac{19}{4}$ 时，$y=-\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{19}{4}\right)+\dfrac{3}{2}=\dfrac{43}{16}$，$\therefore Q_2\left(-\dfrac{19}{4},\dfrac{43}{16}\right)$.

综上，符合条件的点 Q 的坐标为 $(-1,-2)$ 或 $\left(-\dfrac{19}{4},\dfrac{43}{16}\right)$.

刷有所得

数形结合思想

利用数形结合思想把代数和几何图形结合起来，利用点的坐标的意义表示线段的长度，从而求出线段之间的关系，解决相关问题.

第三部分　中考新趋势

刷 趋势

1. A 【解析】依题意有$\begin{cases}x+y=100,\\300x+\dfrac{500}{7}y=10\ 000,\end{cases}$故选 A.

2. $\dfrac{1}{3}$ 【解析】从这三种方式中随机选出一种制作窗格，选中“步步锦”的概率是 $\dfrac{1}{3}$，故答案为 $\dfrac{1}{3}$.

3. 1 919　3 782 【解析】$\because$ 四位数 $M=\overline{abcd}$ 是最小的“十全